aus $\omega_\tau + \omega_b$, wobei $\omega_\tau = 1/\tau$ und $\omega_b = 2D/b^2$ ist. Eine Berechnung des Mittelwertes des Stromes durch die Probe (gemittelt über eine Halbperiode) zeigte, daß der Verlauf des mittleren Stromes in Abhängigkeit von der Frequenz im wesentlichen durch S_1 (vgl. [7], Abb. 5) beschrieben wird.

Zu dem gleichen Ergebnis führte die Messung der Frequenzabhängigkeit (Abb. 11), die nach dem in Abb. 12 gezeigten Prinzip gemessen wurde. Die Einschaltung eines Gleichrichters Gl zur Trennung der Anreicherungsphase von der Verarmungsphase war notwendig, weil bei den hierbei anwendbaren Spannungen von 2 bis 5 Volt die Dichteüberhöhung etwa gerade so groß ist wie die Verarmung (vgl. Abb. 4), so daß bei Mittelung über eine ganze Periode, wie sie vom Röhrenvoltmeter durchgeführt wird, nur sehr kleine Stromänderungen feststellbar wären. Die kritische Frequenz ω_{kr} ist bei dem angeführten Beispiel im Mittel 9,5 kHz. Die Abhängigkeit dieser kritischen Frequenz von der angelegten Wechselspannung für die Proben 2a und 3a zeigt Abb. 13. Die Kurven sind dabei so durch die Meßpunkte gelegt, daß sie für $U = 0$ in den aus $\omega_\tau = 1/\tau$ und $\omega_b = 2D/b^2$ (vgl. II, 1) berechneten theoretischen Wert einmünden.

Herrn Prof. Welker bin ich für zahlreiche Anregungen und Diskussionen zu großem Dank verpflichtet, ferner danke ich Herrn Dr. A. Hoffmann für die zur Verfügung gestellten Germanium-Einkristalle und Herrn Dr. Weiß für die Überlassung der Ergebnisse der Leitfähigkeits- und Hall-Effektsmessungen.

NOTIZEN

Näherungsweise Integration der Elenbaas-Hellerschen Differentialgleichung

Von G. Schmitz und K. Schick

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforschg. **10a**, 495 [1955]; eingegangen am 17. Mai 1955)

Die Energiebilanz eines wandstabilisierten Lichtbogens, die im stationären Fall die zur Wand abgeleitete Wärmeleistung gleich der um die Abstrahlung verminderten Stromleistung setzt, läßt sich immer auf eine Differentialgleichung der allgemeinen Form

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + C_1 f_1(y) + C_2 f_2(y) = 0 \qquad (1)$$

(Elenbaas - Hellersche Differentialgleichung) bringen. C_1 und C_2 sind Konstanten, $f_1(y)$ und $f_2(y)$ Funktionen der abhängigen Veränderlichen y. Die Randbedingungen für die Differentialgleichung (1) lauten:

$$x = 0; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0; \quad x = 1; \quad y = y_1 = \text{const.}$$

Durch die quadratische Substitution $u = (C_1/4)x^2$ läßt sich (1) auf ein Anfangswertproblem transformieren[1, 2]. Mit $C_2/C_1 = k$ erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right) + f_1(y) + k f^2(y) = 0 \qquad (2)$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$u = 0, \quad y = y_0; \quad \mathrm{d}y/\mathrm{d}u = -f_1(y_0) - k f_2(y_0).$$

An der Stelle $y = y_1$ ergibt sich $4u_1 = C_1$.

Eine Möglichkeit, die Gl. (2) näherungsweise zu integrieren, erhalten wir, wenn wir die Funktion $-f_1(y) - k f_2(y)$ durch einen Streckenzug approximieren.

Für ein einzelnes Geradenstück ergibt sich an Stelle der Gl. (2)

$$(xy')' = A + By;$$

A und B sind Konstanten, die passend zu wählen sind. Aus der Substitution $A + By = t$ folgt $y' = (1/B)t'$ und

$$(xt')' = Bt.$$

Die Substitution $x = (-1/4B)\xi^2$ liefert $t' = (-2B/\xi)\dot{t}$, wenn wir die Ableitung nach ξ mit einem Punkt bezeichnen. Da

$$x t' = \tfrac{1}{2}\xi\dot{t}$$

ist, ergibt sich für

$$(x t')' = -B\left(\ddot{t} + \frac{\dot{t}}{\xi}\right) = B t$$

und für t die Differentialgleichung

$$\ddot{t} + \frac{\dot{t}}{\xi} + t = 0.$$

Das ist aber eine Besselsche Differentialgleichung vom Typus

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \text{ für } n = 0.$$

Die Lösung für t lautet:

$$t = \alpha I_0(\xi) + \beta N_0(\xi),$$

wobei α und β Konstanten sind und I_0 und N_0 die Besselsche bzw. Neumannsche Funktion mit dem Parameter $n = 0$ ist. Mit $\alpha^* = \alpha/B$ und $\beta^* = \beta/B$ ergibt sich für y in dem betrachteten Intervall die Funktion

$$y = -\frac{A}{B} + \alpha^* I_0(\xi) + \beta^* N_0(\xi),$$

für das n-te Intervall lautet diese Beziehung

$$y_n = -\frac{A_n}{B_n} + \alpha_n^* I_0 + \beta_n^* N_0.$$

Die Konstanten α_n^* und β_n^* bestimmen sich aus der Bedingung, daß y und $\dot{y}$ stetig sein müssen.

[1] G. Schmitz, Phys. Z. **44**, 129 [1943].
[2] G. Schmitz u. W. Hecker, Z. Phys. **129**, 104 [1951].